أ. المعتز البيتوني

مبرهنة: الشرط اللازم والكافي حتى تكون الدالة

$f: D \longrightarrow R^m \; ; D \subset R^n$

$x \rightarrow f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots f_m(x))$

مستمرة في النقطة x_0 من D هو أن تكون الدالة الحقيقية لعدة متغيرات

$f_i : D \longrightarrow R \; , x \rightarrow f_i(x)$

مستمرة في النقطة x_0 حيث $i = 1, \dots m$ $f_i : D \to R : x \to f_i(x)$ مستمرة

البرهان: لنفرض أن f مستمرة في النقطة x_0 عندئذ يقابل كل عدد حقيقي موجب ε عدد حقيقي موجب δ بحيث إذا كان D

$|x - x_0| < \varepsilon$ فإن:

$|f(x) - f(x_0)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (f_i(x) - f_i(x_0))^2} < \varepsilon$

وبالتالي

$|f_i(x) - f_i(x_0)| < \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon \;, i = 1, 2,$

وهذا يعني أن الدالة f_i مستمرة في x_i كفاية الشرط:

لنفرض أن الدوال f_i مستمرة في x_0 وعندئذ يقابل كل عدد حقيقي موجب ε عدد حقيقي موجب δ بحيث إذا كان $x \in D$

و $\|x - x_2\| < \delta$ فإن

$|f_i(x) - f_i(x_0)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \; ; \; i = 1, 2 \dots n$

ومنه

$\|f(x) - f(x_0)\| = \sqrt{(f_i(x) - f_i(x_0))^2}$

$< \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{n} + \dots \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon$

$$f_i(x) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cdot \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & ; x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & ; x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

ادرس قابلية المفاضلة عند النقطة (0,0)

$$\lim_{(k,h)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - h\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{0,0} - k\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{0,0}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,0)} = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{k^2 \sin \frac{1}{k}}{k} = 0 \quad \Rightarrow \lim_{(k,h)\to 0,0} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(k,h)\to 0,0} = \frac{h^2+k^2 \sin \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}}{\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}} = 0$$

$\Leftarrow$ f قابل للمفاضلة عند (0,0)

مبرهنة هامة:

إن المتتالية (X_k) في الفضاء R^n تتقارب من النقطة $a = (a_1, \dots a_n)$

إذا وفقط إذا تقاربت المتتاليات الحقيقية $(X_k) \dots (X_{k_1})$ من الأعداد

$a_n, \dots, a_1$ على الترتيب

الإثبات: نختار في الفضاء R المسافة المألوفة $d(x,y) = |y-x|$ وفي الفضاء

الإقليدي R^n المسافة

$$d_0 : [(X_1, X_2 \dots X_n), (y_1, y_2 \dots y_n)] = \sup_{i \le x \le n} |y_i - X_i|$$

لزوم الشرط: نفرض أن المتتالية $\{X_k\}$ تتقارب من النقطة a عندئذ

$$\forall \varepsilon \in R^*_+ ; \exists N_\varepsilon ; \forall k \in IN ; k \ge N_\varepsilon$$

$$\Rightarrow d_0(X_k, a) = \sup_{1 \le i \le n} |X_{k_i} - a_i| < \varepsilon$$

وبالتالي:

$$d(X_{k_i}, a_i) = |X_{k_i} - a_i| < \varepsilon$$

أياً كان i من المجموعة $\{1, 2, \dots, n\}$ وهذا يعني أن المتتالية الحقيقية $\{X_{k_i}\}$

متقاربة من النقطة a_i، وذلك من أجل $i = 1, 2, \dots n$

كفاية الشرط:

لنفرض أن كلاً من المتتاليات $\{X_{k_1}, X_{k_2}, \dots, X_{k_n}\}$ متقاربة

من النقاط $(a_1, a_2 \dots a_n)$ كل منها على الترتيب عندئذ يكون:

$$\forall \varepsilon \in R^*_+ : \exists N'_\varepsilon \in IN ; \forall k \in IN_\varepsilon \Rightarrow d(x_i, a_i) = |X_{k_i} - a_i| < \varepsilon$$

وذلك أياً كان $i = 1, 2, \dots, n$ وبالتالي فإن

$$d_0(X_k, a) = \sup |X_{k_i} - a_i| < \varepsilon$$

وهذه يعني أن المتتالية $\{X_k\}$ تتقارب من

النقطة a

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر تحليل (4)
لطلاب السنة الثانية رياضيات
الفصل الأول للعام الدراسي 2016/2015

اسم الطالب : سليمان عمار
العلامة : 100
المدة : ساعة ونصف

السؤال الأول: (22 علامة)

اذكر تعريف تقارب متتالية (x_n) في فضاء متري (E, d) من نقطة a حيث $a \in E$ ، ثم برهن أن المتتالية (x_k) في الفضاء $\mathbb{R}^n$ تتقارب من النقطة $a = (a_1, \dots a_n)$ إذا وفقط إذا تقاربت المتتاليات الحقيقية $(x_{k_1}), \dots, (x_{k_n})$ من الأعداد $a_1, \dots, a_n$ على الترتيب .

السؤال الثاني: (21 علامة)

عرّف تكافؤ نظيمين N_1 و N_2 على فضاء متجهي V ، ثم برهن أنه إذا كان V فضاء جداء داخلي فإن الدالة $V \to \mathbb{R}_+ \; ; \; x \to \|x\| = \sqrt{(x, x)}$ تعرف نظيماً على V.

السؤال الثالث: (15 علامة)

لتكن الدالة f المعرفة بالشكل $f: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ حيث

$(x, y) \to f(x, y) = \frac{y^3 \sin x}{x^2+y^2}$ ، فاثبت أن $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$

السؤال الرابع: (21 علامة)

عرّف استمرار التطبيق $f: E \to F$ بين فضائين متريين (E, d_E) و (F, d_F) في نقطة a من E ، ثم برهن أن الشرط اللازم والكافي حتى تكون الدالة $f: D \to \mathbb{R}^m \; ; \; D \subseteq \mathbb{R}^n$ حيث $x \to f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots f_m(x))$ مستمرة في النقطة x_0 من D هو أن تكون الدوال الحقيقية لعدة متغيرات (المركبات)

$f_i: D \to \mathbb{R} \; ; \; x \to f_i(x) \; , \; i = 1, \dots, m$ مستمرة في النقطة x_0 .

السؤال الخامس: (21 علامة)

ادرس قابلية المفاضلة عند النقطة $(0, 0)$ للدالة :

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & ; (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

حمص في 3 / 2 / 2016

د. عصام شيخو

Subject ____________ التاريخ: ____________

Date ____________ الموضوع: ____________

① $f: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \to \frac{e^{xy} - 1}{x^2 + y^2}$

ادرس وجود النهاية $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2xe^{x^2}}{4x}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$$

ومنه ليس لـ f نهاية في $(0,0)$

$\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$

② $\lim f(x,y,z) = 0$ بين أن $f(x,y,z) = x^2y^2z^2 \cdot \ln(x^2+y^2+z^2)$

يكفي أن نلاحظ أن

$$x^2y^2z^2 \cdot \ln(x^2+y^2+z^2) = \frac{x^2y^2z^2}{(x^2+y^2+z^2)} (x^2+y^2+z^2) \cdot \ln(x^2+y^2+z^2$$

Subject

Date

التاريخ:

الموضوع:

مبرهنة: (1)

ليكن V فضاءً متجهياً و N_1, N_2 نظيمين متكافئين على V عندئذٍ المسافات d_1, d_2 المولدتان بالنظيمين N_1, N_2 متكافئتان.

بما أن النظيمين متكافئين فإن:

$$\alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x) \; ; \; \forall \; x \in V$$

وبالتالي إذا كان x, y من V فإن

$$\alpha N_1(x-y) \leq N_2(x-y) \leq \beta N_1(x-y)$$

ومنه

$$\alpha d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta d_1(x,y)$$

مبرهنة (2)

النظيمات N_1, N_2 يعرفان التوبولوجيا ذاتها على E

الإثبات:

نرمز بـ T_1 للتوبولوجيا المعرفة بالمسافة d_1 ونرمز بـ T_2 للتوبولوجيا المعرفة بالمسافة d_2

ونفرض V عنصر من T_1 وإذا كان $V = \emptyset$ فإن $V \in T_2$

نفرض $V \neq \emptyset$ وليكن x عنصر من V عندئذٍ يوجد ε من R_+ بحيث يكون:

$$B_1(x_0, \varepsilon) = \{x \in V : d_1(x, x_0) < \varepsilon\} \subseteq V$$

ولما كان

$$\alpha d_1(x, x_0) \leq d_2(x, x_0) \leq \beta d_1(x, x_0)$$

فيوجد $\alpha\varepsilon = \varphi$ من R_+^* بحيث يكون:

$$B_2(x_0, \varphi) = \{x \in V : d_2(x, x_0) < \varphi\} \subseteq V$$

حيث

$$B_2(x_0, \varphi) \subseteq B_1(x, \varepsilon) \subseteq V$$

هذا يعني أن $V \in T_2$ ومنه $T_1 \subseteq T_2$

الجداء الداخلي:

إذا كان V فضاء متجهي فوق R فإن الجداء الداخلي على V هو كل دالة حقيقية h معرفة على $V \times V$:

$$h : V \times V \to R \; , \; (x, y) \to h(x, y) = \langle x, y \rangle$$

Subject

Date

التاريخ:

الموضوع: ملخص تحليل ٣

تعريف الفضاء المتجهي:

نقول عن V أنه فضاء متجهي حقيقي إذا تحققت الشروط الآتية

1) مهما تكن $x,y,z \in V$ فإن: $(x+y)+z = x+(y+z)$

2) يوجد في V عنصر حيادي نرمز له بالرمز 0 ونسميه صفر V: $x+0=0+x=x$

3) يوجد لكل عنصر x في V نظير هو $-x$: $\forall x \in V$; $x+(-x)=(-x)+x=0$

4) مهما تكن $x,y \in V$: $x+y=y+x$

أي أن $(V,+)$ زمرة تبديلية

5) مهما تكن $x,y \in V$ وأياً كان $a \in R$ فإن $a(x+y)=ax+ay$

6) مهما تكن $x \in V$ وأياً كانا $a,b \in R$ فإن $(a+b)x=ax+bx$

7) أياً كان $x \in V$ وأياً $a,b \in R$ فإن $(a.b)x=a(bx)$

8) أياً كان $x \in V$ فإن $1x=x$

تعريف الفضاء الجزئي:

ليكن V فضاء متجهي حقيقياً و F مجموعة جزئية غير خالية منه نقول عن F أنه فضاء متجهي جزئي من V إذا تحققت الشروط التالية:

1) أياً كان $x,y \in F$ فإن $x+y \in F$

2) أياً كان $x \in F$ و $a \in R$ فإن $ax \in F$ ونلاحظ أن $\{0\}$ و V و $\{au , a \in R\}$ هي فضاءات جزئية من V

تعريف متتالية كوشي في فضاء متري

ليكن (E,d) فضاء متري و $\{x_n\}$ متتالية في E نقول عن $\{x_n\}$ أنها متتالية كوشي إذا قابلت كل عدد حقيقي موجب ε عدد صحيح موجب $N(\varepsilon)$ بحيث إذا كان $p \ge N_\varepsilon$ و $q \ge N_\varepsilon$ فإن $d(x_p , x_q) < \varepsilon$

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر التحليل (4)
لطلاب السنة الثانية رياضيات
الفصل الثاني للعام الدراسي 2015 / 2016

اسم الطالب :
المدة : ساعة ونصف
العلامة : 100

السؤال الأول : (18 علامة)

عرّف متتالية كوشي في فضاء متري ، ثم برهن أن كل متتالية متقاربة في فضاء متري هي متتالية كوشي

السؤال الثاني : (17 علامة)

لتكن f و g دالتين حقيقيتين معرفتين على المجموعتين الجزئيتين A و B من $\mathbb{R}^n$ ولتكن a نقطة من $\overline{A\cap B}$ ولنفترض وجود النهايتين $\lim_{x\to a} f(x)$ ، $\lim_{x\to a} g(x)$ ، فاثبت أن :

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x)=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$$

السؤال الثالث : (15 علامة)

ادرس وجود نهاية الدالة f المعرفة بالشكل : $f:\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}\to\mathbb{R}$ حيث

$f(x,y,z)=\frac{\sin xyz}{x^2+y^2+z^2}$ في النقطة $(0,0,0)$ ، ثم بيّن فيما إذا كانت الدالة f مستمرة في تلك النقطة .

السؤال الرابع : (17 علامة)

عرّف التطبيق المستمر بانتظام بين فضاءين متريين ، ثم أثبت أنه إذا كان $(V,\|.\|)$ فضاءً منظماً فإن التطبيق

$a_0\in\mathbb{R}$ ، $f(x)=a_0x : x\in V$ ؛ $f:V\to V$ مستمر بانتظام .

السؤال الخامس : (18 علامة)

أثبت أن الدالة $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ المعرفة بالشكل

$$f(x,y)=\begin{cases} x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} ; & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 ; & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

غير قابلة للمفاضلة في النقطة $(0,0)$.

السؤال السادس : (15 علامة)

احسب التكامل الثنائي $I=\iint_A (x+y)\,dx\,dy$ حيث السطح A محدود بالدائرتين

$x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$ ومحور السينات حيث $y\geq 0$.

حمص في 4 / 7 / 2016

د. عصام [illegible]

Subject ______ الموضوع: ______

Date ______ الموضوع: ______

مبرهنة: إن كل متتالية متقاربة في الفضاء المتري (X,d) هي متتالية كوشي

البرهان: لتكن $\{x_n\}$ متتالية متقاربة في الفضاء المتري (X,d) من النقطة a عندئذ يقابل كل عدد حقيقي موجب ε عدد صحيح موجب $N(\varepsilon)$ بحيث يكون من أجل

$p \geq N_\varepsilon$ و $q \geq N_\varepsilon$ فإن:

وبالتالي يكون:

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, a) + d(a, x_q)$$

ومنه:

$$d(x_p, a) < \frac{\varepsilon}{2} \quad و \quad d(x_q, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

فإن

$$d(x_p, x_q) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

وهذا يعني أن $\{x_n\}$ هي متتالية كوشي.

تعريف الفضاء التبولوجي:

ليكن X مجموعة و T أسرة من المجموعات الجزئية من X نقول عن T أنها تبولوجيا على X إذا حققت الشروط التالية:

1) كل اجتماع لعناصر من T هو عنصر من T
2) تقاطع عنصرين من عناصر T هو عنصر من T
3) إن X و $\emptyset$ تنتميان إلى T

تعريف النظيم:

إذا كان V فضاءً شعاعياً حقيقياً فإن النظيم على V هو كل دالة حقيقية N معرفة على V:

$$N : V \to \mathbb{R}_+ , \quad x \mapsto N(x)$$

تحقق الشروط التالية: 1) $\forall x \in V$: $N(x) = 0 \iff x = 0$

2) أياً كانت x من V و a من $\mathbb{R}$: $N(ax) = |a| N(x)$

3) أياً كانت x و y من V: $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

Subject ________ التاريخ: ________

Date ________ الموضوع: ________

يحقق الشروط التالية

① إذا كان x من V فإن $(x,x) \geq 0$

② إذا كان x من V فإن $\langle x,y\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

③ إذا كان x,y من V فإن $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$

④ إذا كان x,y,z من V فإن

$$\langle x+y , z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle y,z\rangle$$

$$\langle x, y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$$

⑤ إذا كان x,y من V و α من R فإن

$$\langle \alpha x, y\rangle = \langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$$

((ملاحظة))

يسمى كل فضاء متجه عُرِّف عليه جداء داخلي بـ: فضاء جداء داخلي

مبرهنة: ((متباينة شوارتز))

إذا كان V فضاء جداء داخلي فعندئذٍ:

$$\langle x,y\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle \quad *$$

وذلك إذا كان x,y من V

البرهان

إذا كان $y=0$ فإن العلاقة * صحيحة:

لنفرض أن $y \neq 0$ عندئذٍ نجد أنه من أجل أي عدد حقيقي a إن

$$0 \leq \langle x-ay , x-ay\rangle = \langle x,x\rangle - 2a\langle x,y\rangle + a^2\langle y,y\rangle$$

وإذا فرضنا أن a مساوية لـ $\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$ نجد أن

$$0 \leq \langle x,x\rangle - 2\frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle y,y\rangle} + \frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle y,y\rangle}$$

وبالتالي

$$0 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2$$

وهذه العلاقة محققة:

$$\langle x,y\rangle \leq \langle x,y\rangle \cdot \langle y,y\rangle$$

Subject ____________

Date ____________

ضاء ضرب داخلي بالدالة:

$V \longrightarrow R_+ \ , \quad x \longrightarrow \|x\| = \sqrt{\langle x, x}$

ًا على V فأثبت ذلك

ط مستنداً إلى تعريف الجداء الداخلي نجد:

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0 \quad \ldots\ldots \quad (1)$

(1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\langle x, x \rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle x, x \rangle =$

(2) $\|ax\| = \sqrt{\langle ax, ax \rangle} = \sqrt{a^2 \langle x, x \rangle} = |a| \sqrt{\langle x,}$

$= |a| \, \|x\|$

(3) $\|x+y\|^2 = \langle x+y , x+y \rangle \leq \|x\|^2 + 2\langle x, y$

$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y \rangle}$

$= \|x\| \cdot \|y\|$

ومنه متباينة مثلثية نجد أنه

$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2$

$= (\|x\| + \|y\|)^2 \rightarrow \|x+y\|$

ضاء باناخ:

(V, N) فضاء منظماً و d مسافة على V المولدة بالنظيم

(V, d) فضاء متري تام ~~...~~ فنقول عن V أنه ~~...~~

اخ

لتكن f و g دالتين حقيقيتين معرفتين على المجموعتين الجزئيتين A, B
من R^* على الترتيب [illegible] ونقطة من $(A \cap B)$ فإذا افترضنا وجود
النهايتين
$$\lim_{x \to a} f(x) \quad = \quad \lim_{x \to a} g(x)$$
فإن:

(1) $$\lim_{x \to a} (f+g)x = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

البرهان:

نفرض أن $\lim_{x \to a} f(x) = p$ ، $\lim_{x \to a} g(x) = q$

وإذا كان ε عدد حقيقي فإنه

$$\exists\ \delta_1 \in R_+^* \ ,\ \forall\ x \in A \ ,\ d(x,a) < \delta_1$$
$$\Rightarrow |f(x) - p| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists\ \delta_2 \in R_+^* \ ,\ \forall\ x \in B \ ,\ d(x,a) < \delta_2$$
$$\Rightarrow |g(x) - q| < \frac{\varepsilon}{2}$$

وبالتالي $\exists\ \delta = \min(\delta_1, \delta_2) \in R_+^* \ ,\ \forall\ x \in A \cap B$

$$d(x,a) < \delta \Rightarrow |f(x) + g(x) - (p+q)| <$$

$$|f(x) - p| + |g(x) - q| < \varepsilon$$

أي أنه

$$\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = p + q$$

Subject ____________ التاريخ: ____________

Date ____________ الموضوع: ____________

② $\lim (f \cdot g)(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$

لما كان ε عدد حقيقي موجب فإنه

$\exists\ \delta_3 \in \mathbb{R}^*_+ ;\ \forall\ x \in A \ , d(x,a) < \delta_3 \Rightarrow$
$|f(x) - p| < \min\left(\frac{\varepsilon}{3|q|} , \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{3}}\right)$

$\exists\ \delta_4 \in \mathbb{R}^*_+ ;\ \forall\ x \in B \ , d(x,a) < \delta_4 \Rightarrow$
$|g(x) - q| < \min\left(\frac{\varepsilon}{3|p|} , \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{3}}\right)$

وبالتالي:

$\exists\ \delta' = \min(\delta_3 , \delta_4) \in \mathbb{R}^*_+ ;\ \forall\ x \in A \cap B$
$, d(x,a) < \varepsilon \Rightarrow$

$|(f(x) \cdot g(x)) - (p \cdot q)| = |(f(x) - p)q + (g(x) - q)p$
$+ (f(x) - p)(g(x) - q)| \leq$

$|f(x) - p|\,|q| + |g(x) - q|\,|p| + |f(x) - p| \cdot |g(x) - q|$

$< \frac{\varepsilon}{3|q|}|q| + \frac{\varepsilon}{3|p|}|p| + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{3} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon}}{3} = \varepsilon$

$\Leftarrow$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = pq$

Subject ______ الموضوع: ______

Date ______ التاريخ: ______

الدوال المتصلة بانتظام

ليكن (E,d) و (F,d_F) فضائين متريين و f تطبيق معرف على المجموعة الجزئية D من E بقيمه في F نقول عن f أنه متصل بانتظام على D إذا وفقط إذا كان لكل عدد حقيقي موجب ε يوجد عدد حقيقي موجب δ بحيث أنه إذا كان x و y أي عنصرين من D يحققان $d(x,y) < \delta$ فإن $d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon$

من أمثلة الدوال المتصلة بانتظام

① إذا كان $(E, \|\cdot\|)$ فضاء منظما فإن التطبيق النظيم

$N: E \to \mathbb{R}^+ ;\ x \to N(x) = \|x\|$

متصل بانتظام

لأنه لكل عدد حقيقي موجب ε يوجد عدد حقيقي موجب $\delta = \varepsilon$

بحيث إذا كان x و y أي عنصرين في E يحققان $d = \|x-y\| < \delta$

فإن $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\| < \delta = \varepsilon$

② إذا كان $E \times E \to E ;\ (x,y) \to x+y$

فإن الدالة متصلة بانتظام

لأنه لكل عدد حقيقي موجب ε يوجد عدد حقيقي موجب $\delta = \varepsilon$

بحيث إذا كان (x,y) و (x',y') أي عنصرين من $E \times E$ يحققان

$d'((x,y),(x',y')) = d(x,x') + d(y,y')$

$= \|x-x'\| + \|y-y'\| < \delta$

فإن $\|(x+y) - (x'+y')\| \leq \|x-x'\| + \|y-y'\| < \delta = \varepsilon$

③ إذا كان $a \in \mathbb{R}$ ثابت فإن $E \to E ;\ x \to ax$

لكل عدد حقيقي موجب ε يوجد عدد حقيقي موجب $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$

بحيث إذا كان y و x أي عنصرين في E يحققان $\|y-x\| < \delta$ فإن

$d(ax, ay) = \|ax - ay\|$

$= |a| \, \|x-y\| < |a| \, \delta = \varepsilon$

أي التطبيق متصل بانتظام

② $x_0 \in V$ ، $a \to a x_0$ ، $R \to V$

يقابل لكل عدد حقيقي موجب ε عدد حقيقي $\delta = \varepsilon$

بحيث إذا كان a, b أي عددين حقيقيين يحققان $|a-b| < \delta$ فإن

$$\|ax_0 - bx_0\| = |a-b| \, \|x_0\|$$

$$< \delta \|x_0\| < \varepsilon$$

لذلك مستمر بانتظام.

~~الفضاء الإقليدي~~

تعريف

الفضاء الإقليدي: هو كل فضاء عرف عليه معيار جداء داخلي وأن المعيار في الفضاء الإقليدي على الشكل

$\|x\|^2 = \langle x,x \rangle$ ، $\forall x \in E$

حيث E فضاء إقليدي

أثبت تحقق العلاقة $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ في الفضاء الإقليدي.

الحل:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y , x+y \rangle$$

$$① \dots = \langle x,x \rangle + \langle x,y \rangle + \langle y,x \rangle + \langle y,y \rangle$$

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y , x-y \rangle$$

$$② \dots = \langle x,x \rangle + \langle x,-y \rangle + \langle -y,x \rangle + \langle -y,-y \rangle$$

بجمع ① و ② نجد

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\langle x,x \rangle + 2\langle y,y \rangle$$

$$= 2(\langle x,x \rangle + \langle y,y \rangle)$$

$$= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \ell_2$$

العلاقة محققة

مبرهنة:

إذا كانت E ، F و G ثلاث فضاءات منظمة وكانت

$T \in \ell(E,F)$ و $L \in \ell(F,G)$

عندئذ $\|L \circ T\| \leq \|L\| . \|T\|$

البرهان: إذا كان $E=0$ فالمتراجحة محققة لنفرض $E \neq \{0\}$

$$\|L \circ T\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|L(T(x))\|}{\|x\|}$$

$$\leq \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|L\| . \|T(x)\|}{\|x\|} = \|L\| . \|T\|$$

تعريف التطبيق التآلفي:

ليكن A ، B فضاءين تآلفيين فوق الفضاءين المتجهين E و F على الترتيب نقول عن التطبيق:

$\phi : A \to B$

أنه تآلفي إذا وجدت نقطة a من A بحيث يكون التطبيق

$\phi_a : E \to F$

$u \to \phi_a(u) = \phi(a+u) - \phi(a)$ خطيا

وبشكل عام نقول عن التطبيق $\phi : E \to F$ أنه تآلفي إذا كان تطبيقاً تآلفياً للفضاء التآلفي المشارك لـ E في الفضاء التآلفي المشارك لـ F.

وإذا كان $\phi : A \to B$ تطبيقاً تآلفياً عندئذ:

$$\phi(x+u) - \phi(x) = \phi(a+x-a+u) - \phi(a+x-a)$$
$$= \phi_a(x-a+u) - \phi_a(x-a)$$
$$= \phi_a(u)$$

وبالتالي $\phi_x = \phi_a$ ومنه ϕ_a مستقلة عن a

Subject
Date

التاريخ:
الموضوع:

تعريف: (قابلية المفاضلة)

ليكن E, F فضاءين متجهين حقيقيين منظمين ولتكن D مجموعة جزئية من E و a نقطة داخلية من D نقول عن الدالة

$$f : D \to F \ , \quad x \to f(x)$$

أنها قابلة للمفاضلة حسب فريشيه في النقطة a ، إذا وجد تطبيق خطي مستمر $L : E \to F$ بحيث يكون:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|_E} \left[f(a+h) - f(a) - L(h) \right] = 0$$

تعريف (تفاضل فريشيه)

إذا كانت الدالة $f : D \to F \ , D \subset E$

قابلة للمفاضلة في النقطة الداخلية a من D فإننا نقول عن التطبيق الخطي المستمر $L : E \to F$ أنه تفاضل فريشيه لـ f في النقطة a ونرمز له بـ df_a إذا كانت D مجموعة مفتوحة من E ، فإننا نقول عن الدالة $f : D \to F$

أنها قابلة للمفاضلة على D ، إذا كانت قابلة للمفاضلة في كل نقطة من D ، عندئذ نرمز بـ df للدالة

$$df : D \to \mathcal{L}(E, F) \ , \quad x \to df_x$$

Subject ______ التاريخ: ______

Date ______ الموضوع: ______

عملي

(٥)

دورة ٢٠١٥م

$$u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2xy} & ; xy \neq 0 \\ 1 & ; xy = 0 \end{cases}$$

ادرس استمرار الدالة $u(x,y)$ عند النقطة $(0,0)$
ثم ادرس استمرار الدالة بالنسبة لـ x عند النقطة $(1,0)$ ثم بالنسبة لـ y عند $(1,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos x-y - \cos(x+y)}{2xy}$$

نعلم أن

$$\cos x - \cos y = \sin\frac{(x+y)}{2} \cdot \sin\frac{(x-y)}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x \cdot \sin y}{x \cdot y} = \lim_{x\to(0,0)} \frac{\sin x}{x} , \lim_{x\to(0,0)} \frac{\sin y}{y}$$

$$= 1 \cdot 1 = 1$$

وبما أنه $\lim u(x,y) = u(0,0) = 1$

$\Leftarrow$ الدالة مستمرة عند النقطة $(0,0)$

$$\lim u(x,0) = \lim_{x\to\infty} 1 = 1$$

$$= u(1,0)$$

الدالة مستمرة عند النقطة $(1,0)$ للمتغير x

$$\lim_{y\to0} (1,y) = \lim_{y\to0} \frac{\sin(1)\cdot\sin y}{(1)(y)}$$

$$= \sin 1 \cdot \lim_{y\to0} \frac{\sin y}{y}$$

$$= \sin 1 \cdot (1) = \sin 1 \neq u(1,0)$$

الدالة غير مستمرة عند النقطة $(1,0)$ بالنسبة لـ y

سنة ثانية

الحل:
مثال ١١
تمارين النهايات
المتعددة

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(y-x)(1+x)}{(y+x)(1+y)}$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{(y-x)(1+x)}{(y+x)(1+y)}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{-x(1+x)}{x(1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} (-1-x) = -1$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \frac{(y-x)(1+x)}{(y+x)(1+y)}\right] = \lim_{y\to 0} \frac{y(1)}{y(1+y)}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{1}{1+y} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\right) f(x,y) \neq \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\right) f(x,y)$$

$$-1 \neq 1$$

نلاحظ من طريقة أخرى عند تعويض $y = mx$

$$\Rightarrow \lim \frac{(y-x)(1+x)}{(y+x)(1+y)} = \lim \frac{(mx-x)(1+x)}{(mx+x)(1+mx)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x(m-1)(1+x)}{x(1+m)(1+mx)} = \frac{m-1}{m+1}$$

النهاية غير موجودة لأنها تعتمد على الطريق (المسار)

Subject ______ التاريخ: ______

Date ______ الموضوع: ______

(2) تمرين

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\right) = \sin.$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\right) = \sin$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\right)$$

$\sin =$ النهاية موجودة

$$\lim \frac{xy}{x^2+2y^2}$$

نفرض $y = mx$

$$\lim \frac{m}{1+2m^2} = \frac{m}{1+2m^2}$$

ونلاحظ أنه

النهاية غير موجودة

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \cdot y}{|x|+|y|}$$

نفرض $r \to 0$ $\begin{cases} y \to 0 \\ x \to 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$$\lim_{r\to 0}\left(\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r\cos\theta + r\sin\theta}\right)$$

Subject ______ التاريخ: ______

Date ______ الموضوع: ______

$$= \lim_{r \to 0} \frac{r \cos\theta \cdot \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} = \frac{0}{\cos\theta \sin\theta}$$

$$= \lim_{r \to 0} \frac{0}{\cos\theta \cdot \sin\theta} = 0$$

النهاية $\lim_{(x,y) \to (0,0)} = 0 \Leftarrow \lim \frac{x \cdot y}{|x|+|y|} = 0$

مثال دورة عدد على كاملة (الطريقة 1)

لتكن الدالة f المعرفة بالشكل $f : R^2 - \{(0,0)\} \to R$

حيث $f(x,y) = \frac{y^3 \sin x}{x^2 + y^2}$

أثبت أن: $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0$ ~~lim (x,y~~

الحل:

$$\lim_{x \to 0} \left[\lim_{y \to 0} f(x,y) = \frac{y^3 \sin x}{x^2 + y^2} \right]$$

نعوض كل أماكن y بـ 0

① $\lim_{x \to 0} \left[\lim_{y \to 0} \frac{(0) \sin x}{x^2 + (0)} = \frac{0}{x^2} \right] = 0$

نعوض كل أماكن x بـ 0

$$\lim_{y \to 0} \left[\lim_{x \to 0} \frac{y^3 \sin x}{x^2 + y^2} \right]$$

$$= \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} \frac{y^3 \sin(0)}{(0) + y^2} = \frac{0}{y^2} = 0$$

Subject
Date

التاريخ:
الموضوع:

$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) = \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y))$ ومنه

$0 = 0$

النهاية الأصلية موجودة وتساوي الصفر ومنه

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x,y) = 0$

~~التحليل البسيط~~ مثال دورة ماضية الثانية نكلو عليا

اثبت أن لدينا الدالة $f: R^2 \to R$, $(x,y) \to x.y$

قابلة للمفاضلة في كل نقطة (x_0,y_0) من R^2 وأن مفاضلها هو

الدالة الخطية $df(x_0,y_0)$

الحل:

$df_{(x_0,y_0)}: R^2 \to R$, $(h,k) \to df_{(x_0,y_0)}(h,k) = y_0h + x_0k$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - y_0h - x_0k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

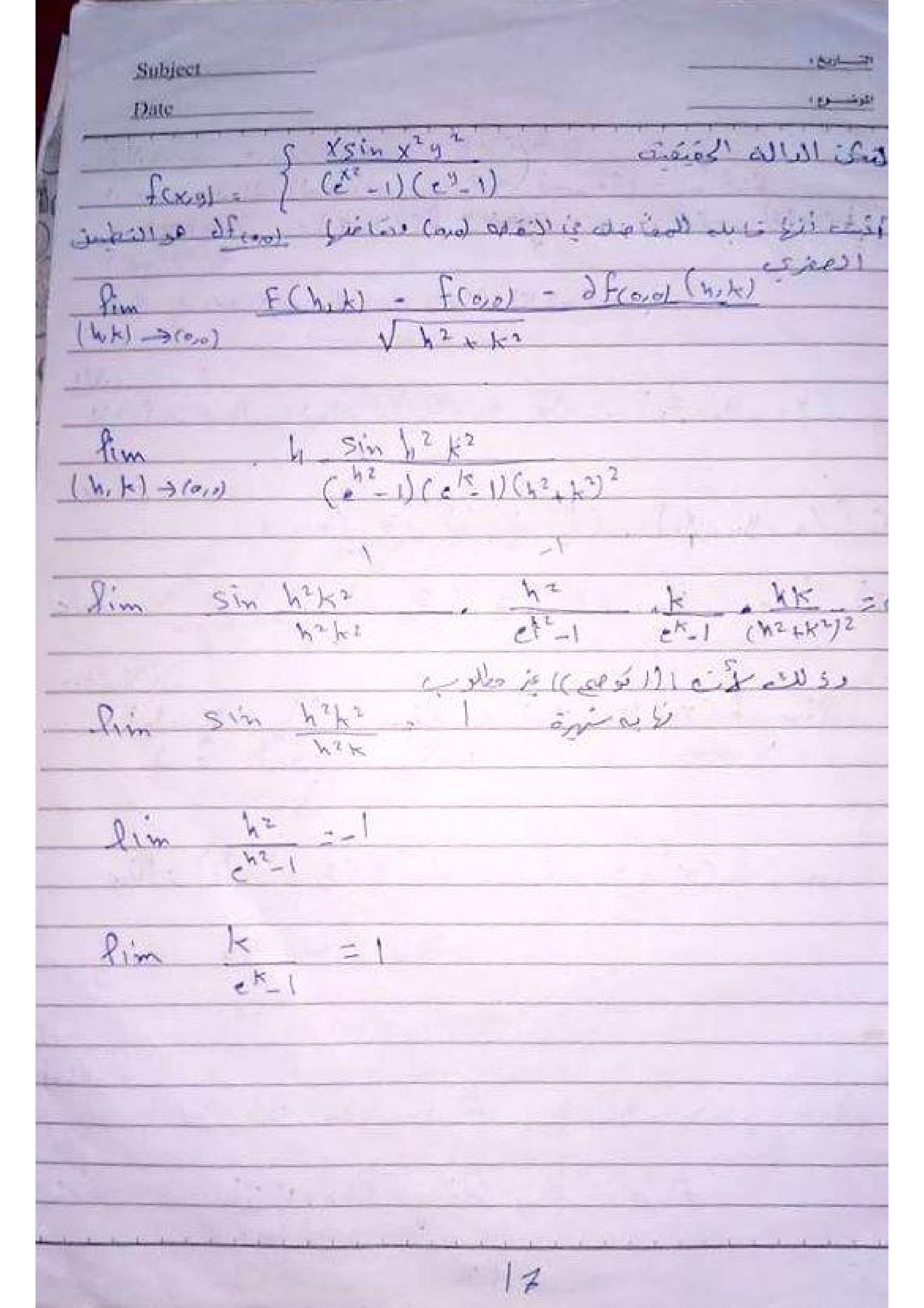
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(x_0+h)(y_0+k) - x_0y_0 - y_0h - x_0k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

لأنه يقابل كل $0<\varepsilon$ يوجد $\delta = 2\varepsilon$ بحيث إذا كان

$\sqrt{h^2+k^2} < \delta$ فإن:

$$\left|\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} - 0\right| \leq \frac{1}{2}\frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} < \frac{1}{2}\delta = \varepsilon$$



Subject ______ التاريخ: ______

Date ______ الموضوع: ______

لدينا الدالة الحقيقية

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \sin x^2 y^2}{(e^{x^2}-1)(e^{y}-1)} \end{cases}$$

أثبت أن f قابلة للمفاضلة في النقطة (0,0) وأن $df_{(0,0)}$ هو التطبيق الصفري

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - df_{(0,0)}(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h \sin h^2 k^2}{(e^{h^2}-1)(e^{k}-1)(h^2+k^2)^2}$$

$$\lim \frac{\sin h^2k^2}{h^2k^2} \cdot \frac{h^2}{e^{h^2}-1} \cdot \frac{k}{e^{k}-1} \cdot \frac{hk}{(h^2+k^2)^2} =$$

$$\lim \sin \frac{h^2k^2}{h^2k} = 1$$

وذلك لأن ((الكوسي)) غير مطلوب لأنه شهيرة

$$\lim \frac{h^2}{e^{h^2}-1} = 1$$

$$\lim \frac{k}{e^{k}-1} = 1$$

Subject
Date

الموضوع:
التاريخ:

سؤال دورة ... ((النهاية))

لتكن التابع المعرف ب $f: \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$

$f(x,y,z) = \frac{\sin xyz}{x^3+y^3+z^3}$

المطلوب: ادرس وجود النهاية في النقطة $(0,0,0)$

الحل:
إذا أخذنا المتتاليتين (x_n, y_n, z_n) و (x'_n, y'_n, z'_n)

نجد أن:

1) $(x_n, y_n, z_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\to} (0,0,0)$

2) $(x'_n, y'_n, z'_n) = \left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\to} (0,0,0)$

نلاحظ أن:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n, z_n) = \lim f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$
$$= \lim \frac{\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{3}{n^3}} = \frac{1}{3}$$

$$\lim f(x'_n, y'_n, z'_n) = \lim f\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$
$$= \lim \frac{\sin \frac{2}{n^3}}{\frac{10}{n^3}} = \frac{1}{5}$$

نجد أن:

$$\lim f(x_n, y_n, z_n) \neq \lim f(x'_n, y'_n, z'_n)$$

ومنه $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$ غير موجودة

Subject ______ التاريخ: ______

Date ______ الموضوع: ______

مثال دورة الحد قرب من الزاوية حيث ثابتة

$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = \frac{x^3 \cos y}{x^2+y^2}$

أثبت أن $\lim f(x,y) = 0$

مقابل كل عدد حقيقي موجب ε عدد حقيقي موجب $\delta = \varepsilon$ بحيث إذا كان

$d_2((x,y),(0,0)) = \sqrt{x^2+y^2} < \delta \,;\, (x,y) \in R^2 - \{(0,0)\}$

فإن $d(f(x,y),0) = |f(x,y)| = |x| \frac{x^2}{x^2+y^2} |\cos y|$

$\leq |x| \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon$

والزاوية موجودة $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

إذا كانت f الدالة المعرفة بـ:

① $f : R^2 - \{(0,0)\} \to R$

$(x,y) \to x.y \ln(x^2+y^2)$

ندرس وجود النهاية $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

نلاحظ في البداية أن

$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} (x^2+y^2) \ln(x^2+y^2)$

فبما أن $\lim\limits_{z\to 0} z \ln z = 0$ و ~~الدالة~~ g

والدالة g المعرفة

$g(x,y) = \frac{x.y}{x^2+y^2}$ محدودة فإن

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$